Chapitre 1

Dualité en programmation linéaire

Etant donné un programme linéaire on peut toujours lui associer un autre programme linéaire appelé programme dual du programme initial : dans ce cas le programme initial est appelé programme primal. Ces deux programmes sont dits alors programmes duaux, ou duals, ou en dualité.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *Etant donné le programme linéaire sous la forme générale* (P) *ci-dessous*

$$\min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i & i = 1, ..., p \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i = p+1, ..., m \\ x_j \geq 0 & j = 1, ..., q \\ x_j \text{ libre} & j = q+1, ..., n \end{cases} \qquad (P)$$

On appelle programme dual de (P) *le programme linéaire* (D) *ci-dessous*

$$\max\ W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$
$$\begin{cases} y_i \geq 0 & i = 1, ..., p \\ y_i \ \text{libre} & i = p+1, ..., m \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j & j = 1, ..., q \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j & j = q+1, ..., n \end{cases} \qquad (D)$$

Cette définition est caractérisée par les règles suivantes :

1) A un problème primal de minimisation (de maximisation) correspond un problème dual de maximisation (minimisation).

2) A toute vraie contrainte primale correspond une variable duale : si la vraie contrainte est une inégalité, la variable duale est soumise à une condition de non-négativité (≥ 0).
Si la contrainte est une égalité, la variable duale est libre (*i.e* quelconque) . Par convention en dualité, les contraintes d'inégalité d'un problème de minimisation
(maximisation) sont toujours considérés sous la forme " $\geq$" (" $\leq$").

3) A toute variable primale correspond une contrainte duale :
- si la variable primale est soumise à une condition de non-négativité, la contrainte duale est une

inégalité.
- si la variable est libre, la contrainte est une égalité.
4) Les coefficients de la fonction-objectif du primal deviennent les seconds membres des contraintes duale. Les seconds membres des vraies contraintes primales deviennent les coefficients de la fonction-objectif du dual.
5) La matrice des vraies contraintes du dual est la transposée de la matrice des vraies contraintes du primal.

On a la propriété suivante :

Proposition 1.1.1 *L'opération de la dualité est involutive (i.e le dual du dual est le primal).*

En pratique pour déterminer le dual d'un programme linéaire, on peut utiliser les règles de transferts suivantes (règles permettant de déterminer le type de variables et de contraintes du problème dual).

Primal (Dual)	Dual (Primal)
Fonction objectif à maximiser	Fonction objectif à minimiser
$i^{\text{ème}}$ contrainte $\geq$	$i^{\text{ème}}$ variable ≤ 0
$i^{\text{ème}}$ contrainte $\leq$	$i^{\text{ème}}$ variable ≥ 0
$i^{\text{ème}}$ contrainte $=$	$i^{\text{ème}}$ variable $\gtreqless 0$
$j^{\text{ème}}$ variable ≥ 0	$j^{\text{ème}}$ contrainte $\geq$
$j^{\text{ème}}$ variable ≤ 0	$j^{\text{ème}}$ contrainte $\leq$
$j^{\text{ème}}$ variable $\gtreqless 0$	$j^{\text{ème}}$ contrainte $=$

Ce tableau se lit dans les deux sens (i.e de la gauche vers la droite comme de la droite vers la gauche).

Considérons le programme linéaire

$$\min Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Son dual est

$$\max W = yb$$
$$\begin{cases} yA \leq c \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Dans cette notation matricielle la variable duale y est une matrice ligne contrairement à la variable primale qui elle est une matrice colonne.

Remarque 1.1.1 *On remarque une symétrie (contraintes d'inégalités et valeurs positives dans un problème sous forme canonique et son dual).*

1.2 Propriétés de la dualité

Considérons le programme linéaire :

$$Z^* = \min Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (P)$$

(où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$) et son dual :

$$W^* = \max W = yb \qquad \left\{ \begin{array}{l} yA \leq c \\ y \geq 0 \end{array} \right. \tag{D}$$

Proposition 1.2.1 (Propriété de la dualité faible)
Si x et y sont respectivement des solutions réalisables de (P) et (D) alors on a : $cx \geq yb$

Corollaire 1.2.1 *On a : $Z^* \geq yb$ pour tout y : solution réalisable de (D).*
$W^* \leq cx$ pour tout $\forall x$ solution réalisable de (P).

Corollaire 1.2.2 *Si $Z^* = -\infty$, le problème (D) n'admet pas de solution réalisable (i.e le dual (D) est impossible si (P) est non borné).*
De même si $W^* = +\infty$, le problème primal n'admet pas de solution réalisable, en d'autres termes, si le dual (D) est non borné, le primal (P) est impossible.

Corollaire 1.2.3 *Si x^* et y^* sont respectivement solution réalisable (P) et (D) vérifiant $cx^* = y^*b$, alors, x^* et y^* sont des solutions optimales de (P) et (D) respectivement.*

Preuve : Si x^* n'est pas solution optimale de (P) *i.e* $\exists \overline{x}$ solution réalisable de (P) avec $c\overline{x} < cx^*$ (car problème de minimisation)
$c\overline{x} < cx^* = y^*b$, absurde !
On montre de même pour l'autre cas. □

Proposition 1.2.2 (Propriété de la dualité forte)
Si (P) (respectivement (D)) possède une solution optimale finie alors il en de même pour (D) (respectivement (P)) et de plus $Z^* = W^*$
En d'autres termes étant donné deux problèmes en dualité si l'un possède une solution optimale finie, alors il en est de même pour l'autre et de plus les valeurs optimales sont égales.

Preuve : Considérons le programme (P) sous forme standard

$$Z^* = \min Z = cx \qquad \left\{ \begin{array}{l} Ax - I_m s = b \\ x,\ s \geq 0 \end{array} \right. \tag{P'}$$

Le problème (P) admet une solution optimale finie si et seulement si $(\widetilde{P})$ admet une solution optimale finie.

Notons $\widetilde{c} = (c, 0)$, $\widetilde{A} = (A - I_m)$ et $u = \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$. Le problème $(\widetilde{P})$ s'écrit alors

$$Z^* = \min Z = \widetilde{c}u \qquad \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{A}u = b \\ u \geq 0 \end{array} \right.$$

Supposons alors que $(\widetilde{P})$ possède une solution optimale finie, il existe donc une solution réalisable de base optimale. Soit B une base réalisable optimale et u^* la solution de base réalisable optimale associée. On sait par ailleurs que le dual de $(\widetilde{P})$ est :

$$W^* = \max W = yb$$
$$\begin{cases} yA \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Comme B est optimale, alors $\widetilde{c} - \widetilde{c}_B B^{-1} \widetilde{A} \geq 0$ (car problème de minimisation).. Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} c - \widetilde{c}_B B^{-1} A \geq 0 \\ \widetilde{c}_B B^{-1} \geq 0 \end{cases}$$

Posons $y^* = \widetilde{c}_B B^{-1}$. On remarque que y^* est solution réalisable du dual. En outre on a $Z(u^*) = \widetilde{c}_B B^{-1} b = y^* b = W(y^*)$. Ce qui implique d'après le corollaire(1.2.3) que y^* est solution optimale de (D). □

On a les corollaires suivants .

Corollaire 1.2.4 *Soit x^* et y^* respectivement des solutions réalisables de (P) et (D).*

$$cx^* = y^* b \Longleftrightarrow \begin{cases} x^* \text{ est solution optimale de } (P) \\ y^* \text{ est solution optimale de } (D). \end{cases}$$

Corollaire 1.2.5 *Etant donné une paire de problèmes en dualité, il n'existe que 4 situation possibles parmi les 9 potentielles.*
1) Les deux problèmes possèdent des solutions optimales finies
2) a) Le problème primal non borné, et le problème dual est impossible
b) le problème dual est non borné et le problème primal est impossible
3) Les deux problèmes sont impossibles.

On peut schématiser cela dans le tableau suivant

Primal/ dual	Solution optimale finie	Problème non borné	Problème impossible
Solution optimale finie	1)	non	non
Problème non borné	non	non	2) a)
Problème impossible	non	2) b)	3)

1.3 Théorèmes des écarts complémentaires

On considère toujours les programmes linéaires en dualité :

$$Z^* = \min Z = cx \quad \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (P) \qquad W^* = \max W = yb \quad \begin{cases} yA \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (D)$$

On a le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *(Théorème faible des écarts complémentaires)*
Soit x^* et y^* deux solutions respectivement réalisables de (P) et (D).
Une condition nécessaire et suffisante pour que x^* et y^* soient solutions optimales est qu'elles vérifient :

$$\begin{cases} y^*(Ax^* - b) = 0 & (1) \\ (c - y^*A)x^* = 0 & (2) \end{cases}$$

Preuve : Posons $\alpha = y^*(Ax^* - b)$ et $\beta = (c - y^*A)x^*$; comme x^* et y^* sont des solutions réalisables de (P) et (D), on a $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et

$$\alpha + \beta = y^*Ax^* - y^*b + cx^* - y^*Ax^* = cx^* - y^*b.$$

Or une condition nécessaire et suffisante d'optimalité de deux solutions réalisables x^* et y^* respectivement de (P) et (D) est $cx^* - y^*b = 0$. Ce qui est équivalent à $\alpha + \beta = 0$. Comme α et β sont non négatifs, cette condition est encore équivalente à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^*(Ax^* - b) = 0 \\ (c - y^*A)x^* = 0 \end{cases}$$

D'où le théorème. □

Si a_i et A_j désignent respectivement les matrices lignes et colonnes correspondant à la ligne i et la colonne j de A, on a

$$y(Ax - b) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} y_i(a_ix - b_i) = 0 \Leftrightarrow y_i(a_ix - b_i) = 0 \quad \forall i = 1, ..., m,$$

et

$$(c - yA)x = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (c_j - yA_j)x_j = 0 \Leftrightarrow x_j(c_j - yA_j) = 0 \quad \forall j = 1, ..., n.$$

On peut dire alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux solutions réalisables x et y respectivement de (P) et (D) soient solutions optimales est qu'elles vérifient :

$$\begin{cases} y_i(a_ix - b_i) = 0 & \forall i = 1, ..., m \\ (c_j - yA_j)x_j = 0 & \forall j = 1, ..., n \end{cases}$$

Il existe une autre version dite version forte du théorème des écarts complémentaires.

Théorème 1.3.2 (théorème fort des écarts complémentaires)
Une solution réalisable x de (P) est une solution optimale de (P) si et seulement si il existe y une solution réalisable du dual telle que

$$\begin{cases} yA_j = c_j & si \quad x_j > 0 \quad \forall j \\ y_i = 0 & si \quad a_ix > b_i \quad \forall i \end{cases}$$

Exemple 1.3.1

a) Considérons le programme linéaire ci-dessous.

$$\min\ Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Montrons que le point $x = (1,1)^T$ est une solution optimale.

On vérifie facilement que ce point est une solution réalisable.

donc d'après le théorème des écarts complémentaires x est solution optimale si et seulement si il existe une solution réalisable y du dual telle que

$$\begin{cases} (3x_1 + x_2 - 4)y_1 = 0 \\ (x_1 + 4x_2 - 5)y_2 = 0 \\ (3y_1 + y_2 - 1)x_1 = 0 \\ (y_1 + 4y_2 - 1)x_2 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x par sa valeur dans ce système, on obtient :

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + 4y_2 = 1 \end{cases}$$

Soit alors le point $y = (\frac{3}{11}, \frac{2}{11})^T$. Cette solution est bien réalisable du dual par suite x est solution optimale.

b) Considérons le programme linéaire ci-dessous.

$$\min\ Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

i) Le point $x = (3,1)^T$ est-il une solution optimale ?

ii) Le point $x = (\frac{26}{9}, \frac{7}{9})^T$ est-il une solution optimale ?

i) On vérifie facilement la réalisabilité de x. C'est une solution optimale si et seulement si existe une solution réalisable y du dual telle que

$$\begin{cases} (2x_1 + x_2 - 3)y_1 = 0 \\ (2x_1 - x_2 - 5)y_2 = 0 \\ (x_1 + 4x_2 - 6)y_3 = 0 \\ (2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2)x_1 = 0 \\ (y_1 - y_2 + 4y_3 - 3)x_2 = 0 \end{cases}$$

On remplace x par sa valeur dans ce système, on obtient :

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_2 = -3 \end{cases}$$

Ce qui n'est pas. En conclusion le point x n'est pas solution optimale.

ii) On vérifie facilement la réalisabilité de x. C'est une solution optimale si et seulement si il existe une solution réalisable y du dual telle que

$$\begin{cases} (2x_1 + x_2 - 3)y_1 = 0 \\ (2x_1 - x_2 - 5)y_2 = 0 \\ (x_1 + 4x_2 - 6)y_3 = 0 \\ (2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2)x_1 = 0 \\ (y_1 - y_2 + 4y_3 - 3)x_2 = 0 \end{cases}$$

On remplace x par sa valeur dans ce système, on obtient :

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ 2y_2 + y_3 = 2 \\ -y_2 + 4y_3 = 3 \end{cases}$$

Ce qui donne la solution $y = (0, \frac{5}{9}, \frac{8}{9})^T$ qui est bien une solution réalisable du dual. Par suite x est une solution optimale.

1.4 Algorithme dual Simplexe

On considère le programme linéaire :

$$Z^* = \min\ Z = cx \qquad \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (PL)$$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; $c \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ et $b \in M_{m,1}(\mathbb{R})$
On suppose que $rg(A) = m < n$.

On a la définition suivante :

Définition 1.4.1 *Soit B une base de (PL). Cette base est dite duale réalisable si $\widehat{c} = c - c_B B^{-1} A \geq 0$.*
Par opposition, B est primale réalisable si $\widehat{b} = B^{-1} b \geq 0$.

Remarque 1.4.1 *1) Pour un problème de maximisation une base B est dite duale réalisable si $\widehat{c} = c - c_B B^{-1} A \leq 0$. Elle est primale réalisable si $\widehat{b} = B^{-1} b \geq 0$.*
2) Une base B qui est à la fois primale et duale réalisable est optimale.

L'algorithme dual simplexe contient deux phases :

Phase 1 : Procédure d'initialisation
On détermine une première base duale réalisable. Si cette procédure échoue, cela signifie qu'une telle base n'existe pas. C'est-à-dire que le polyèdre de la solution réalisable du dual est, vide, et donc $(P.L)$ est impossible soit non borné $Z^* = -\infty$.

Phase 2 : Procédure itérative
1) On considère B une base, on note I (*resp.* J) l'ensemble des indices des variables de base (resp. hors-base). On écrit le programme linéaire sous forme canonique par rapport à B. On dispose donc $\widehat{A} = B^{-1} A$, $\widehat{c} = c - c_B B^{-1} A$ et $\widehat{b} = B^{-1} b$.
Si B est duale réalisable alors :

2) Tester $\hat{b} = B^{-1}b$.

a) Si $\hat{b} \geq 0$, stop : (la solution courante est optimale).

b) Si $\exists i \in I$ tel que $\hat{b}_i < 0$ et $\hat{a}_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J$, stop : (le problème (PL) est impossible).

c) Autrement, on effectue un changement de base.

3) Changement de base

a) **Test de sortie** : Soit $l \in I$ telle que

$$\hat{b}_l = \min_i \{\hat{b}_i : i \in I, \ \hat{b}_i < 0\}.$$

La variable correspondante x_l sort de la base.

b) **Test d'entrée** : Soit $k \in J$ telle que

$$\left|\frac{\hat{c}_k}{\hat{a}_{lk}}\right| = \min\left[\left|\frac{\hat{c}_j}{\hat{a}_{lj}}\right| : j \in J, \ \hat{a}_{lj} < 0\right].$$

La variable x_k rentre dans la base.

c) On pose $I := I - l + k$ et $J := J - k + l$; aller à 1).

Remarque 1.4.2 *Dans le cas d'un problème de maximisation cet algorithme reste valable.*

Exemple 1.4.1

$$\min \ Z = 8x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 5 \\ x_1, \ x_2, \ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard de (P_1) est :

$$\min \ Z = 8x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 = 5 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

L'ensemble $I = \{4, 5\}$ est une base évidente. La forme canonique par rapport à I est :

$$\min \ Z = 8x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = -5 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

On a $\hat{c} \geq 0$ donc I est une base duale réalisable.

On a les tableaux simplexes successifs suivants.

TS1

	x_1	x_2	x_3		
x_4	-1	2	-1	-6	←
x_5	-1	-3	1	-5	
	8	6	2	0	
			↑		

TS2

	x_1	x_2	x_4		
x_3	1	-2	-1	6	
x_5	-2	-1	1	-11	←
	6	10	2	-12	
	↑				

TS3

	x_5	x_2	x_4	
x_3	1/2	-5/2	-1/2	1/2
x_1	-1/2	1/2	-1/2	11/2
	3	7	5	-45

La condition d'arrêt de l'algorithme est vérifiée une solution optimale du problème est $x^* = (\frac{11}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 45$.

Exemple 1.4.2

$$\max\ Z = -5x_1 - 21x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard est :

$$\max\ Z = -5x_1 - 21x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

L'ensemble $I = \{4, 5\}$ est une base évidente. La forme canonique par rapport à I est :

$$\max\ Z = -5x_1 - 21x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 = -2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = -1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

On a $\hat{c} \leq 0$ donc I est une base duale réalisable.

On a les tableaux simplexes successifs suivants.

TS1

	x_1	x_2	x_3		
x_4	-1	1	-6	-2	←
x_5	-1	-1	-2	-1	
	-5	0	-21	0	
			↑		

TS2

	x_1	x_2	x_4		
x_3	1/6	-1/6	-1/6	1/3	
x_5	-2/3	-4/3	-1/3	-1/3	←
	-3/2	-21/6	-21/6	7	
	↑				

TS3

	x_5	x_2	x_4	
x_3	1/2	-1/2	-1/4	1/4
x_1	-3/2	2	1/2	1/2
	-9/4	-1/2	-11/4	31/4

La condition d'arrêt de l'algorithme est vérifiée une solution optimale du problème est $x^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})^T$ et la valeur optimale est $Z^* = -\frac{31}{4}$.

Phase 1 : Initialisation de l'algorithme dual simplexe : Méthode de la contrainte artificielle

Cette méthode est nécessaire dans le cas où il existe B une base initiale mais qui n'est pas duale réalisable. On considère pour cela un problème artificiel (P_a), créé de la façon suivante.

Soit le problème (PL) mis sous forme canonique par rapport à la base B. A ce problème on ajoute une contrainte supplémentaire appelée contrainte artificielle :

$$v + \sum_{j \in K} x_j = M$$

où

• v est une variable artificielle non négative ($v \geq 0$)

• $K = \{j \in J : \widehat{c}_j < 0\}$

• M est une constante symbolique positive aussi grande que l'on veut (c'est-à-dire supérieur à tout nombre auquel il pourra être comparé).

En résumé on a :

$$\min\ Z = \widehat{Z} + \widehat{c}x$$
$$\begin{cases} x_B + B^{-1}Nx_N = \widehat{b} \\ v + \sum_{j \in K} x_j = M \\ x \geq 0, \quad v \geq 0. \end{cases} \qquad (P_a)$$

Il est immédiat que $I_a = I \cup \{v\}$ est une base évidente de (P_a).

On considère le changement de base imposé suivant :

• v sort de la base I_a

• la variable x_k telle que $\widehat{c}_k = \min\{\widehat{c}_j : j \in K\}$ rentre dans la base.

On obtient immédiatement une base duale réalisable pour (P_a). On résout ce dernier à l'aide de l'algorithme dual phase 2 en partant de cette base.

1) Si (P_a) n'admet pas de solution réalisable, le problème initial (PL) n'admet pas de solution réalisable non plus.

2) Si (P_a) admet une solution optimale dans laquelle la variable artificielle v est nulle, le problème (PL) est non borné.

3) Si (P_a) admet une solution optimale dans laquelle v est positive, alors mise à part la variable v, la solution obtenue constitue une solution optimale de (PL).

Remarque 1.4.3 *1) Dans le cas d'un problème de maximisation, l'algorithme reste valable moyennant les modifications suivantes :*

• $K = \{j \in J : \widehat{c}_j > 0\}$

• *Dans le changement de base initial imposé, la variable rentrante est x_k avec k tel que $\widehat{c}_k = \max\{\widehat{c}_j : j \in K\}$*

2) Dans la méthode des tableaux, après le changement de base initial imposé, si en cours d'algorithme, la variable artificielle v, revient dans la base, il est certain qu'elle n'en sortira plus. Ainsi, la ligne correspondante dans le tableau simplexe devient superflue et peut-être supprimée.

Exemple 1.4.3

$$\min\ Z = 6x_1 + 3x_2 - 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_3 \geq 9 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard est :

$$\min\ Z = 6x_1 + 3x_2 - 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_5 = 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

L'ensemble $I = \{4, 5\}$ est une base évidente. La forme canonique par rapport à I est :

$$\min\ Z = 6x_1 + 3x_2 - 2x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ -2x_1 + 2x_3 + x_5 = -9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On n' a pas $\hat{c} \geq 0$ donc I n'est pas une base duale réalisable.

On va utiliser la méthode de la contrainte artificielle.

Ici on a $K = \{x_3\}$. Donc le programme auxiliaire est :

$$\min\ Z = 6x_1 + 3x_2 - 2x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ -2x_1 + 2x_3 + x_5 = -9 \\ x_3 + v = M \\ v,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

$I_a = \{x_4, x_5, v\}$ est une base évidente du programme auxiliaire ci-dessus et le programme est sous forme canonique par rapport à I_a.

On a le premier tableau simplexe à partir duquel on fait le changement de base initial imposé.

TS1

	x_1	x_2	x_3		
x_4	-1	-1	-1	-6	
x_5	-2	0	2	-9	
v	0	0	1	M	←
	6	3	-2	0	
			↑		

TS2

	x_1	x_2	v		
x_4	-1	-1	1	-6+M	
x_5	-2	0	-2	-9-2M	←
x_3	0	0	1	M	
	6	3	2	2M	
			↑		

La variable artificielle v est rentrée dans la base il est certain qu'elle n'en sortira plus donc la ligne correspondante peut être supprimée.

TS3

	x_1	x_2	x_5		
x_4	-2	-1	1/2	-21/2	←
v	...	...	...	...	
x_3	-1	0	1/2	-9/2	
	4	3	1	-9	
	↑				

TS4

	x_4	x_2	x_5	
x_1	-1/2	1/2	-1/4	21/4
x_3	-1/2	1/2	1/4	3/4
	2	1	2	-30

La condition d'arrêt de l'algorithme est vérifiée. Une solution optimale du problème est $x^* = (\frac{21}{4}, 0, \frac{3}{4})^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 30$.

1.5 Convergence de l'algorithme dual Simplexe

L'algorithme dual Simplexe converge si à chaque itération les coefficients $\widehat{c}_j$, sont strictement positifs pour tout $j \in J$.

Par contre s'il existe $j \in J$ tel que $\widehat{c}_j = 0$, il y a dégénérescence du problème dual. La fonction-objectif peut ne pas varier lors d'une itération, et un cyclage peut se produire. Pour éliminer un éventuel cyclage, et assurer la convergence finie de l'algorithme dual simplexe, on peut utiliser les règles de Bland ci-dessous.

Règles de Bland

Test de sortie : La variable sortante est x_l qui vérifie :

$$l = \min\left[i \in I : \widehat{b}_i < 0\right].$$

M1

Chapitre 2

Programmation linéaire paramétrique

Il peut arriver, dans de nombreux problèmes, que certaines données soient liées à des fluctuations, ou ne soient pas connues avec précision au moment où le programme mathématique est construit. Une telle situation se présente notamment, lorsque le même problème de décision se pose de façon répétée (tous les jours, toutes les semaines, ou tous les mois), mais fait intervenir la valeur de certaines grandeurs (stocks disponibles, cours des matières premières, niveau de la demande, etc) variables dans le temps. On peut songer dans ce cas, à faire dépendre ces données d'un ou plusieurs paramètre(s).

La programmation linéaire paramétrique est la résolution d'un programme linéaire dont certains coefficients dépendent linéairement d'un paramètre λ ou de plusieurs. Il s'agit de déterminer la solution optimale $x^*(\lambda)$ en fonction de λ. On considère généralement les cas suivants :

- le paramètre intervient exclusivement dans la fonction-objectif ;
- le paramètre intervient exclusivement dans le second membre des vraies contraintes.

Les autres cas ne sont étudiés ici car moins fréquents dans la pratique et plus difficiles à résoudre.

2.1 Paramétrisation de la fonction-objectif

Soit le problème

$$\min\ Z(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}(c_j^1 + \lambda c_j^2)x_j \qquad \begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (PL(\lambda))$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ avec $\text{rang}A = m < n$.

Définition 2.1.1 *On appelle intervalle de stabilité relatif à la solution de base réalisable associée à B, l'intervalle (éventuellement vide) des valeurs du paramètre λ pour lesquelles la solution de base réalisable associée à B est solution optimale de $(PL(\lambda))$.*

On suppose que le polyèdre des solutions réalisables est non vide et qu'on dispose d'une base primale réalisable B. Soit I (respectivement J) l'ensemble des indices des variables (respectivement hors base) associées à B.

On considère la forme canonique de $(PL(\lambda))$ par rapport à B :

$$\min\ Z(\lambda) = \hat{Z} + \sum_{j\in J}^{n}(\hat{c}_j^1 + \lambda\hat{c}_j^2)x_j \qquad \begin{cases} x_i + \sum_{j\in J}\hat{a}_{ij}x_j = \hat{b}_i & i \in I \\ x \geq 0 \end{cases}$$

si $\hat{c}_j^1 + \lambda\hat{c}_j^2 \geq 0$ $\forall j \in J$ alors B est optimale.

On montre que

Proposition 2.1.1 *L'intervalle de stabilité associé à B est $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ avec*

$$\underline{\lambda} = \max\left\{-\frac{\hat{c}_j^1}{\hat{c}_j^2} : j \in J \ \hat{c}_j^2 > 0\right\} \ et \ \overline{\lambda} = \min\left\{-\frac{\hat{c}_j^1}{\hat{c}_j^2} : j \in J \ \hat{c}_j^2 < 0\right\}.$$

Remarque 2.1.1
1) On a $\underline{\lambda} = -\infty$ si $\hat{c}_j^2 \leq 0, \ \forall j \in J$ et $\overline{\lambda} = +\infty$ si $\hat{c}_j^2 \geq 0, \ \forall j \in J$.
2) L'intervalle de stabilité est vide si $\underline{\lambda} > \overline{\lambda}$

On définit

Définition 2.1.2 *Deux intervalles de $\mathbb{R}$ sont dits adjacents si la borne supérieure du premier coincide avec la borne inférieure du second. Par exemple $[a, b]$ et $[b, c]$.*

On suppose qu'on dispose d'un intervalle de stabilité associé à B. Pour déterminer un éventuel nouvel intervalle de stabilité adjacent, on fait le changement de base suivant dans l'algorithme primal du simplexe :

- la variable x_k $(k \in J)$ rentrant dans la base est celle dont le coefficient $\hat{c}_j^1 + \lambda\hat{c}_j^2$ s'annule pour $\lambda = \underline{\lambda}$ (respectivement $\overline{\lambda}$).
- la variable sortant de la base est déterminée par la règle classique de l'algorithme primal du simplexe.

Un tel changement de base permet de déterminer l'intervalle de stabilité adjacent à $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ du côté de $\underline{\lambda}$ (respectivement $\overline{\lambda}$).

Remarque 2.1.2 *Si pour un tel changement de base il n'existe pas de pivot (positif) cela signifie qu'au-délà de cette valeur $\underline{\lambda}$ (respectivement $\overline{\lambda}$) le problème est non borné.*

Le problème $(PL(\lambda))$ est complètement résolu lorsque l'intervalle de définition du paramètre λ est décomposé en intervalles de stabilité et en intervalles où le problème est non borné.

Exemple 2.1.1

Résoudre le programme linéaire paramétrique suivant.

$$\min \ Z = (8+2\lambda)x_1 + (7+7\lambda)x_2 + (3+2\lambda)x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1, \ x_2, \ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard de ce programme est :

$$\min \ Z = (8+2\lambda)x_1 + (7+7\lambda)x_2 + (3+2\lambda)x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_1, \ x_2, \ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Il n y a pas de base réalisable évidente on doit donc utiliser soit la phase 1 ou la méthode du grand M.

Utilisons la méthode du grand M.

La variable x_3 n'intervient que dans la deuxième contrainte et le signe de son coefficient est égal à celui du second membre. Elle peut être considérée comme de base associée à cette équation. Il n'est donc plus nécessaire d'ajouter une variable artificielle à cette équation.

Le programme auxiliaire est :

$$\min \ Z = (8+2\lambda)x_1 + (7+7\lambda)x_2 + (3+2\lambda)x_3 + Mx_6$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \cdots, 6. \end{cases}$$

$I = \{x_6, x_3\}$ est une base réalisable évidente. Le programme sous forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min \ Z = M + 3 + 2\lambda + (5-2M)x_1 + (1-M+3\lambda)x_2 + Mx_4 + (3+2\lambda)x_5$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \cdots, 6. \end{cases}$$

TS1

	x_1	x_2	x_4	x_5		
x_6	2	1	-1	0	1	$\leftarrow$
x_3	1	2	0	-1	1	
	$5-2M$	$1-M+3\lambda$	M	$3+2\lambda$	$-3-M-2\lambda$	
	$\uparrow$					

Cette base n'est optimale pour aucune valeur de λ. On choisit une variable hors base ayant de préférence le coefficient le plus négatif comme variable rentrante.

TS2

	x_6	x_2	x_4	x_5		
x_1	$\vdots$	1/2	-1/2	0	1/2	
x_3	$\vdots$	3/2	1/2	-1	1/2	$\leftarrow$
	$\vdots$	$-3/2+3\lambda$	$5/2$	$3+2\lambda$	$-11/2-2\lambda$	
		$\uparrow$				

La base $I = \{x_1, x_3\}$ est optimale pour λ tel que $\hat{c} \geq 0$. Ce qui donne $\lambda \in [\frac{1}{2}, +\infty[$.
Dans ce cas une solution optimale est $x^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$ et la valeur optimale est $Z^*(\lambda) = \frac{11}{2} + 2\lambda$.

Pour l'étape suivante on considère la variable hors base dont le coefficient s'annule pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

TS3

	x_3	x_4	x_5		
x_1	-1/3	-2/3	1/3	1/3	$\leftarrow$
x_2	2/3	1/3	-2/3	1/3	
	$1-2\lambda$	$3-\lambda$	$2+4\lambda$	$-5-3\lambda$	
			$\uparrow$		

Pour la base $I = \{x_1, x_2\}$ l'intervalle de stabilité est $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
La solution optimale est $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)^T$ et la valeur optimale est $Z^*(\lambda) = 5 + 3\lambda$.

TS4

	x_3	x_4	x_1	
x_5	-1	-2	3	1
x_2	0	-1	2	1
	$3-2\lambda$	$7+7\lambda$	$-6-12\lambda$	$-7-7\lambda$
		$\uparrow$		

Pour la base $I = \{x_5, x_2\}$ l'intervalle de stabilité est $[-1, -\frac{1}{2}]$.
La solution optimale est $x^* = (0,1,0)^T$ et la valeur optimale est $Z^*(\lambda) = 7 + 7\lambda$.
Le coefficient qui s'annule pour $\lambda = -1$ ne permet pas d'obtenir un pivot. Donc pour $\lambda \in]-\infty, -1[$ le problème est non borné ; ce qui achève la résolution du problème.

2.2 Paramétrisation du second membre

Soit le problème

$$\min\ Z = cx \qquad \begin{cases} Ax = b = b^1 + \lambda b^2 \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (PL(\lambda))$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{rang} A = m < n$.

L'ensemble des valeurs du paramètre λ pour lesquelles le problème possède une solution optimale peut être décomposé en intervalles de stabilité chacun d'eux correspondant à une base optimale.

Soit B une base duale réalisable (éventuellement obtenue par application de la méthode de la contrainte artificielle). Soit I (respectivement J) l'ensemble des indices des variables de base (respectivement hors base) associé à B.

On suppose le problème écrit sous forme canonique par rapport à la base B. On montre que :

Proposition 2.2.1 *L'intervalle de stabilité associé à B est $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ avec*

$$\underline{\lambda} = \max\left\{-\frac{\hat{b}_i^1}{\hat{b}_i^2} : i \in I,\ \hat{b}_i^2 > 0\right\} \text{ et } \overline{\lambda} = \min\left\{-\frac{\hat{b}_i^1}{\hat{b}_i^2} : i \in I,\ \hat{b}_i^2 < 0\right\}.$$

Remarque 2.2.1
1) On a $\underline{\lambda} = -\infty$ si $\hat{b}_i^2 \geq 0,\ \forall i \in I$ et $\overline{\lambda} = +\infty$ si $\hat{b}_i^2 \leq 0,\ \forall i \in I$.
2) L'intervalle de stabilité est vide si $\underline{\lambda} > \overline{\lambda}$

Pour déterminer un éventuel nouvel intervalle de stabilité adjacent, on fait le changement de base suivant dans l'algorithme dual du simplexe :

- la variable x_l ($l \in I$) sortant de la base est celle dont le coefficient $\hat{b}_i^1 + \lambda \hat{b}_i^2$ s'annule pour $\lambda = \underline{\lambda}$ (respectivement $\overline{\lambda}$).
- la variable rentrant dans la base est déterminée par la règle classique de l'algorithme dual du simplexe.

Un tel changement de base permet de déterminer l'intervalle de stabilité adjacent à $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ du côté de $\underline{\lambda}$ (respectivement $\overline{\lambda}$).

Remarque 2.2.2 *Si pour un tel changement de base, il n'existe pas de pivot (négatif) cela signifie qu'au-delà de cette valeur $\underline{\lambda}$ (respectivement $\overline{\lambda}$) le problème est impossible.*

Le problème $(PL(\lambda))$ est complètement résolu lorsque l'intervalle de définition du paramètre λ est décomposé en intervalles de stabilité et/ou en intervalles pour lesquels le problème est impossible.

Exemple 2.2.1

Résoudre le programme linéaire paramétrique suivant.

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 - 2\lambda \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 - \lambda \\ x_1 - x_2 \le 2 + \lambda \\ x_1,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

La forme standard de ce programme est :

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 - 2\lambda \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 - \lambda \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 + \lambda \\ x_i \ge 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

$I = \{x_3, x_4, x_5\}$ est une base évidente et le programme est déjà sous forme standard par rapport à cette base. On remarque qu'elle n'est pas duale réalisable. On va appliquer la méthode de la contrainte artificielle.

Le programme auxiliaire est :

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 - 2\lambda \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 - \lambda \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 + \lambda \\ x_1 + x_2 + v = M \\ x_i \ge 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

$I = \{x_3, x_4, x_5, v\}$ est une base évidente. Le premier tableau simplexe est :

TS1

	x_1	x_2		
x_3	1	1	$8 - 2\lambda$	
x_4	-2	3	$6 - \lambda$	
x_5	1	-1	$2 + \lambda$	
v	1	1	M	$\leftarrow$
	6	5	0	
	$\uparrow$			

Après le changement de base initial imposé, on obtient :

TS2

	v	x_2		
x_3	-1	0	$8 - 2\lambda - M$	$\leftarrow$
x_4	2	5	$6 - \lambda + 2M$	
x_5	-1	-2	$2 + \lambda - M$	
x_1	1	1	M	
	-6	-1	-6M	
	$\uparrow$			

La base duale réalisable $I = \{x_3, x_4, x_5, x_1\}$ n'est optimale pour aucune valeur de λ. On utilise les règles classiques pour le changement de base.

TS3		x_3	x_2		
	v	...	...	...	
	x_4	2	5	$22-5\lambda$	
	x_5	-1	-2	$-6+3\lambda$	$\leftarrow$
	x_1	1	1	$8-2\lambda$	
		-6	-1	$-48-12\lambda$	
			$\uparrow$		

La base duale réalisable $I=\{v,x_4,x_5,x_1\}$ est optimale si

$$\begin{cases} 22-5\lambda \geq 0 \\ -6+3\lambda \geq 0 \\ 8-2\lambda \geq 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire pour $\lambda \in [2,4]$. Dans ce cas la solution optimale est $x^*(\lambda)=(8-2\lambda,0)^T$ et la valeur optimale est $Z^*(\lambda)=48+12\lambda$.

Remarque 2.2.3 *Il n y a pas d'intervalle de stabilité adjacent du côté de 4 car le coefficient du second membre qui s'annule pour $\lambda = 4$ ne permet pas d'avoir un pivot (négatif). Donc pour $\lambda \in]4,+\infty[$ le problème est impossible.*

TS4		x_3	x_5		
	x_4	-1/2	5/2	$7+5\lambda/2$	$\leftarrow$
	x_2	1/2	-1/2	$3-3\lambda/2$	
	x_1	1/2	1/2	$5-\lambda/2$	
		-11/2	-1/2	$-45+21\lambda/2$	
		$\uparrow$			

La base duale réalisable $I=\{v,x_4,x_2,x_1\}$ est optimale pour $\lambda \in [-\frac{14}{5},2]$. La solution optimale est $x^*(\lambda)=(5-\frac{1}{2}\lambda, 3-\frac{3}{2}\lambda)^T$ et la valeur optimale est $Z^*(\lambda)=45-\frac{21}{2}\lambda$.

TS5		x_4	x_5	
	x_3	-2	-5	$-14-5\lambda$
	x_2	1	2	$10+\lambda$
	x_1	1	3	$12+2\lambda$
		-11	-28	$-122-17\lambda$

La base duale réalisable $I=\{v,x_3,x_2,x_1\}$ est optimale pour $\lambda \in [-6,-\frac{14}{5}]$. La solution optimale est $x^*(\lambda)=(12+2\lambda,10+\lambda)^T$ et la valeur optimale est $Z^*(\lambda)=122+17\lambda$.

Pour $\lambda \in]-\infty,-6[$ le problème est impossible. Ce qui termine la résolution du problème.